ECPAS
Espacios de Control Puntual de Acción Simultánea

Ing. Aníbal Raúl Archenti
Arq. Alberto Horacio Stagnaro
e-mail: raularch@hotmail.com
Tel: 0054-11-4794-2554

RESUMEN

SE DEFINEN LOS ESPACIOS DE CONTROL PUNTUAL DE ACCIÓN SIMULTANEA (ECPAS), LAS ESPECIES DE LOS MISMOS Y SUS GRADOS DE LIBERTAD.
SE DEMUESTRA QUE TODOS ELLOS RESPONDEN A UNA MISMA ECUACIÓN PARAMÉTRICA
SE ESTUDIA EN PARTICULAR EL TRIFOCO Y SE DETERMINAN LAS SECCIONES DEL TRIFOCOIDE.
SE DETERMINA EL ESPACIO TOPOLOGICO DONDE SE ENCUENTRAN LOS PUNTOS QUE ESTÁN A MENOR DISTANCIA DE TRES PUNTOS CUALESQUIERA.
SE DEMUESTRA QUE TODA CURVA ECPAS DE FOCOS COPLANARES TIENE UN NÚMERO CUALQUIERA DE FOCOS ESPACIALES SIEMPRE QUE ESTE SEA UN MÚLTIPLO DEL NÚMERO DE FOCOS EN SU PLANO Y EN PARTICULAR QUE LOS FOCOS ESPACIALES DE LA ELIPSE SE ENCUENTRAN SOBRE SU HIPÉRBOLA CONJUGADA QUE YACE EN EL PLANO PERPENDICULAR AL DE LA ELIPSE EN SU EJE MAYOR.

ABSTRACT

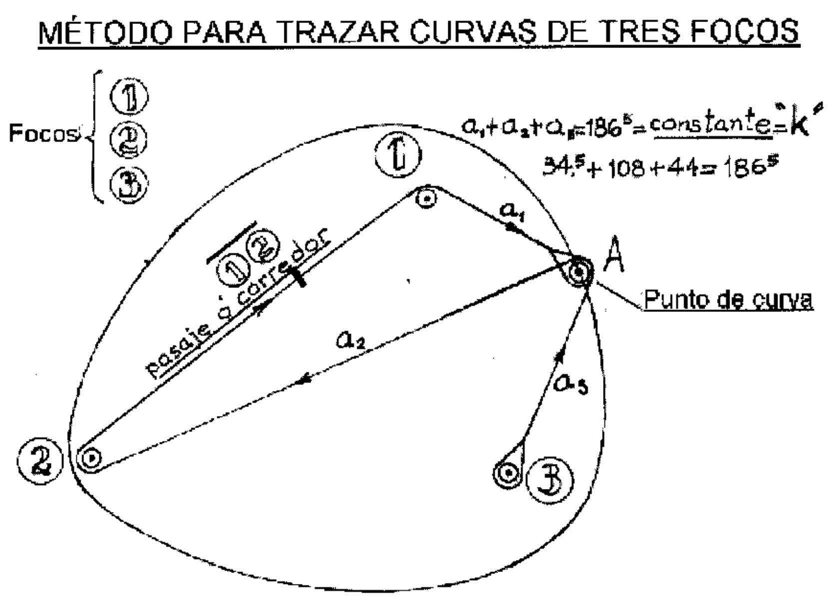
THE SIMULTANEOUS ACTION PUNCTUAL CONTROL SPACES, ITS SPECIES AND ITS DEGREES OF FREEDOM ARE DEFINED.
IT IS PROVED THAT ALL OF THEM FOLLOW THE SAME PARAMETRIC EQUATION.
A PARTICULAR STUDY OF TRIFOCUS IS MADE AND THE SECTIONS OF THE TRIFOCOIDE ARE ESTABLISHED
THE TOPOLOGICAL SPACE WHERE ARE THE POINTS THAT ARE AT THE MINIMAL DISTANCE TO OTHER ANY THREE POINTS OF THE PLANE IS FOUNDED.
IT IS PROVED THAT ANY ECPAS CURVE WITH COPLANAR FOCUS HAS ANY NUMBER OF SPATIAL FOCUS IF THIS NUMBER IS A MULTIPLE OF THE NUMBER OF FOCUS IN ITS PLANE AND IN PARTICULAR THAT THE SPATIAL ELLIPSE FOCUS ARE ON HIS CONJUGATED HYPERBOLA

Un espacio de control puntual de acción simultánea ECPAS es el lugar de los puntos cuyas distancias a un cierto numero de punto dados, llamados focos, suman un valor constante. Son las curvas (cuerpos) que continúan la serie iniciada por la circunferencia (esfera) y la elipse (elipsoide) al aumentar el número de focos.

Este trabajo tiene una singularidad, debió haber sido concebido hace mas de 2000 años.

En la naturaleza, en el mundo real, solo existen tres números el cero, el uno y un número N tal que $1 < N < \infty$, y esto es así porque todas las cosas se presentan en una de esas tres cantidades, inexistentes, únicas o formando parte de un grupo numeroso. Un grano de arena o un ser humano son únicos pero al mismo tiempo existen billones de granos de arena y miles de millones de seres humanos. Esta coexistencia de la individualidad y la diversidad es la base de la evolución y por lo tanto es gracias a ella que somos lo que somos.

Figura 1



Debido a esa inexistencia del número dos la serie de los números naturales 1, 2, 3,... es la base de todo razonamiento lógico y está profundamente insertada en el inconsciente, mientras algo no existe o es único no produce concepciones mentales pero apenas vemos al segundo espécimen inmediatamente concebimos al tercero y a todos los demás.

El primero de los ECPAS, la circunferencia (monofoco), fue concebida hace mas de 4000 años con la invención de la rueda, el segundo, la elipse (bifoco), en Grecia hace 2300 años, el trifoco debió haber sido concebido y estudiado inmediatamente después. ¿ Porqué pasaron mas de 2000 años sin que fuera estudiado?. No tenemos la respuesta a esa pregunta, pero como consecuencia de este atraso en su estudio, los trabajos que dieron origen a esta presentación no tienen antecedentes y uno de ellos tiene la particularidad de ser un trabajo matemático publicable y que solo utiliza como herramientas el álgebra elemental que estaba al alcance de los griegos hace veinte siglos.

El arquitecto Stagnaro diseñó un método para dibujar ECPAS de grado superior y esto posibilitó al ingeniero Archenti encarar su estudio matemático. *(Fig. 1)*

Todos los ECPAS curvas y cuerpos se generan a partir del primero como la serie de números naturales el bifoco se genera por la intersección de dos monofocos cuyos radios sumen una constante k y el trifoco por la intersección de un monofoco de radio **R** y un bifoco de constante $K = k - R$, por eso todos los ECPAS responden a la misma ecuación paramétrica Definamos la ubicación de los primeros $N - 2$ focos por medio de las coordenadas (Δi, ωi, γi) para $i = 1, N\text{-}2$, eligiendo el sistema de coordenadas de tal manera que los últimos dos focos se ubiquen sobre el eje **x** y tengan al eje y como eje de simetría o sea que sus coordenadas serán (-c, 0, 0) y (c, 0, 0), si llamamos **k** a la constante suma de las distancias desde un punto a los N focos, la ecuación se escribe

$Y^2+Z^2 = (u^2-1)\,(c^2 u^2 - X^2) / u^2$

Donde

$u = (k - ri) / 2c > 1$

$\rho i^2 = (x - \Delta i)^2 + (y - \omega i)^2 + (z - \gamma i)^2$

$i = 1, N\text{-}2$

Si queremos estudiar las curvas debemos hacer Z igual a cero en la ecuación y si queremos estudiar las curvas o cuerpos generados por focos coplanares debemos anular las γi.

El monofoco y el bifoco, primeros elementos de este espacio, presentan singularidades; para ambos u es constante, en el caso del bifoco es igual a la inversa de la excentricidad y en el del monofoco es ∞ siendo $c = 0$ y el producto $c * u = R$. Aparentemente a partir del tetrafoco deberíamos separar la serie en dos ramas la de las curvas generadas por focos en un plano y la de las curvas espaciales, sin embargo la separación se produce a partir del trifoco ya que demostraremos la existencia de trifocos generados por focos fuera de su plano que no pueden generarse por ningún conjunto de focos en su plano. Así la serie comienza con el monofoco luego le sigue el bifoco, ambos siempre pueden ser generados por focos en su plano, y luego se abre en dos ramas la de las curvas generadas por focos coplanares y la de las curvas espaciales. Paralelamente podemos disponer un diagrama similar con los cuerpos generados por estas curvas y también encontramos una singularidad en los dos primeros dado que ambos son siempre cuerpos de revolución lo que para los siguientes solo ocurre en casos particulares.

Si analizamos estos espacios de acuerdo a su especie, o sea al número de parámetros necesarios para su definición, vemos que el monofoco (monofocoide) es monoparamétrico (**R**), el bifoco (bifocoide) es biparamétrico (**k**, **e**), el trifoco (trifocoide) es tetraparamétrico (**k**, c, Δ, ω), y continúa aumentando el número de parámetros de a dos o tres según que los focos que se agregan sean coplanares o espaciales. El número de parámetros menos 1 es el número de grados de libertad del espacio, así el monofoco (monofocoide) tiene cero grados de libertad ya que uno de ellos representa a todos los posibles en una cierta escala, el bifoco (bifocoide) tiene un grado de libertad ya que todos pueden ser representados por las excentricidades de 0 a 1.

Otra singularidad entre los dos primeros espacios y los siguientes es que en caso de estos los focos son siempre interiores a los espacios o bien coinciden con ellos en casos extremos ($R=0$ o $e=1$), pero a partir del trifoco los focos pueden ser interiores o exteriores a los espacios que generan.

Dediquémonos a analizar el trifoco para luego extrapolar conclusiones generales a todos los demás.

El menor valor de **k** que puede asignarse a un trifoco es el generado por el punto que se encuentra a la menor distancia de los tres focos y en ese caso el trifoco es precisamente ese punto, luego al ir aumentando **k** desde ese mínimo el trifoco comienza a aumentar de tamaño sin desviarse mucho de la forma circular mientras su radio medio se mantenga pequeño respecto a las distancias entre focos, alcanzado cierto valor de **k** el trifoco será tangente al eje **x**, para luego incorporar al foco 3 al pasar por (-c, 0), este trifoco y el que contiene al foco 2 (-c, 0) son los que mas difieren en su forma de una circunferencia ya que presentan las mayores variaciones de radio de curvatura. *(Fig. 2)*

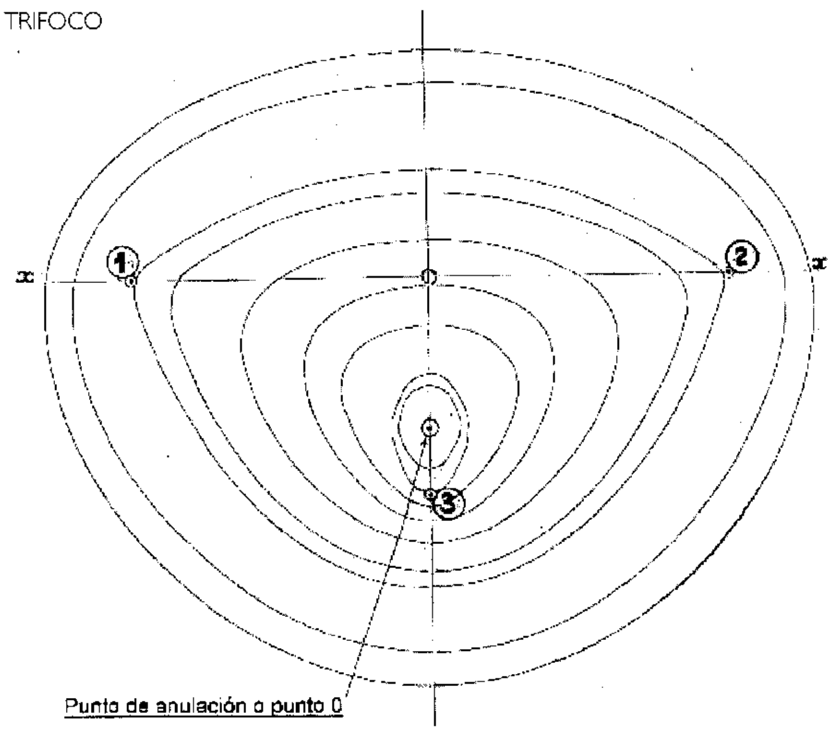


Figura 2

Entre el punto en que el trifoco se hace tangente al eje x y aquel en que el trifoco pasa por el foco 2, el punto en que el trifoco corta al eje x corresponde a un valor de u = 1 para todos los otros trifocos, (aquellos que no cortan al eje x o bien tienen a los focos 2 y 3 en su interior) el u mínimo es mayor que 1 y se encuentra en las cercanías del foco 2 para $y < 0$. Cuando k aumenta lo suficiente como para que el diámetro promedio sea mucho mayor que la distancia entre focos su forma vuelve a diferir poco de la circular. El trifoco que más difiere de un círculo es el que tiene sus tres focos dispuestos según los vértices de un triángulo equilátero y cuyo valor de k es tal que pasa por sus tres focos.

La necesidad de determinar el punto en el cual nace un trifoco (**kmin**) nos llevó a estudiar el espacio topológico determinado por los puntos que están a la menor distancia de tres puntos cualesquiera. Y si bien este problema en principio parece indeterminado, ya que teniendo un punto en (-c, 0), otro en (c, 0) y el tercero en una posición cualquiera (Δ, ω) y debiendo hallar una relación entre las coordenadas (x, y) del punto que está a la menor distancia de esos tres, solo disponemos de dos condiciones, (las derivadas de la suma de distancias respecto de x y de y igualadas a cero) para eliminar los dos parámetros Δ y ω y para establecer una relación entre x e y sin embargo los dos parámetros se eliminan con una sola condición y el espacio que define los puntos que están a la menor distancia está delimitado por el sector de círculo que pasa por (-c, 0), (c, 0) y $(0, c/\sqrt{3})$ y es tal que si el tercer punto (Δ, ω) es interior a él, el punto buscado coincide con él y si es exterior está sobre el arco de círculo más cerca de $(0, c/\sqrt{3})$ cuanto más se acerca ω a ∞.

Para poder calcular las coordenadas de los puntos de un trifoco debemos reescribir su ecuación reemplazando y por su expresión en x, u obteniendo una ecuación de cuarto orden en x donde los coeficientes son funciones de u.

Para un valor apropiado de u esta ecuación tendrá dos raíces reales de x que reemplazadas en la expresión de y en función de x, u nos darán dos puntos del trifoco. Los valores apropiados de u son aquellos que se encuentran entre u mínimo y u máximo, o sea ρ (distancia del punto del trifoco al foco 1) entre ρ máximo y ρ mínimo, si bien la ecuación que determina los valores de u extremo en función de los parámetros está determinada

$$\Delta(y - \omega)^3 + (2\Delta - x)\,\omega\,(y - \omega)^2 + (x - \Delta)(x\Delta - c^2 - \omega^2)(y - \omega) - \omega x(x - \Delta)^2 = 0$$

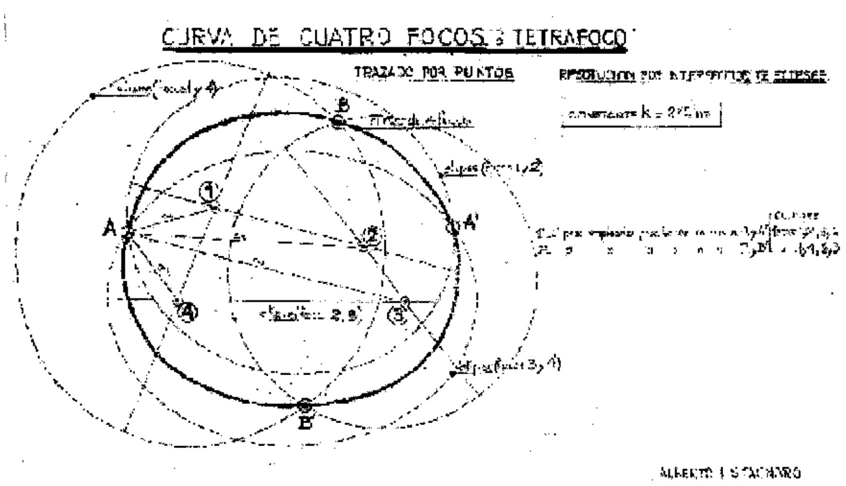


Figura 3

(los pares de valores x e y que satisfacen esta cúbica son las coordenadas de los puntos donde u es extremo para los diferentes valores de k) el procedimiento más simple es comenzar dándole a u el valor 1 y aumentarlo hasta que aparezcan raíces reales de la ecuación de cuarto orden en x, ese será el u mínimo (las dos raíces reales de x son coincidentes), y luego continuar hasta que las raíces vuelvan a ser todas imaginarias lo que determinará el u máximo (nuevamente se obtendrán raíces reales coincidentes); este procedimiento permite calcular todos los puntos del trifoco.

La relación entre los N-focos y los cuerpos generados por ellos está dada por sus focos espaciales.

Todo ECPAS además de los focos en su plano tiene infinitos focos espaciales. El monofoco tiene como focos espaciales todos los puntos de la recta que pasando por su centro es perpendicular a su plano, y el bifoco todos los pares de puntos que pertenezcan a cada rama de su hipérbola conjugada, o sea aquella que tiene su semieje real igual a la distancia focal de la elipse y su distancia focal igual al semieje mayor de la elipse y yace en el plano perpendicular al de la elipse que pasa por su eje mayor.

Elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

Hipérbola
$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1 \qquad \text{(Fig. 4)}$$

Esta relación entre la elipse y su hipérbola conjugada permite, dada una elipse hallar todos los elipsoides de los cuales ella puede ser una sección y dado un elipsoide hallar todas la elipses que puedan ser sección de él.

Dado que podemos considerar a cualquier trifoco como la sección entre un trifocoide y un plano paralelo a su trifoco generatriz podemos concluir que todo trifoco generado por tres focos en su plano tiene tres focos en cualquier plano paralelo al suyo, y si bien las ecuaciones de las seudohipérbolas que contienen a los focos espaciales del trifoco no han sido resueltas, puede demostrarse que, a diferencia del caso de la elipse en que pueden elegirse dos puntos cualesquiera con tal de que pertenezcan a ramas distintas de la hipérbola, los focos espaciales del trifoco deben estar siempre en un plano paralelo al suyo.

El único caso resuelto es el del trifocoide generado por un trifoco cuyos focos forman un triángulo equilátero (trifoco biparamétrico $\Delta = 0$, $\omega = \sqrt{3}c$) en el cual los focos de las secciones paralelas al trifoco generatriz se encuentran sobre las aristas de la pirámide que tiene como base al triángulo equilátero y como vértice el del trifocoide cuya altura es

$$z_{max}^2 = (k^2 - 12c^2)/9$$

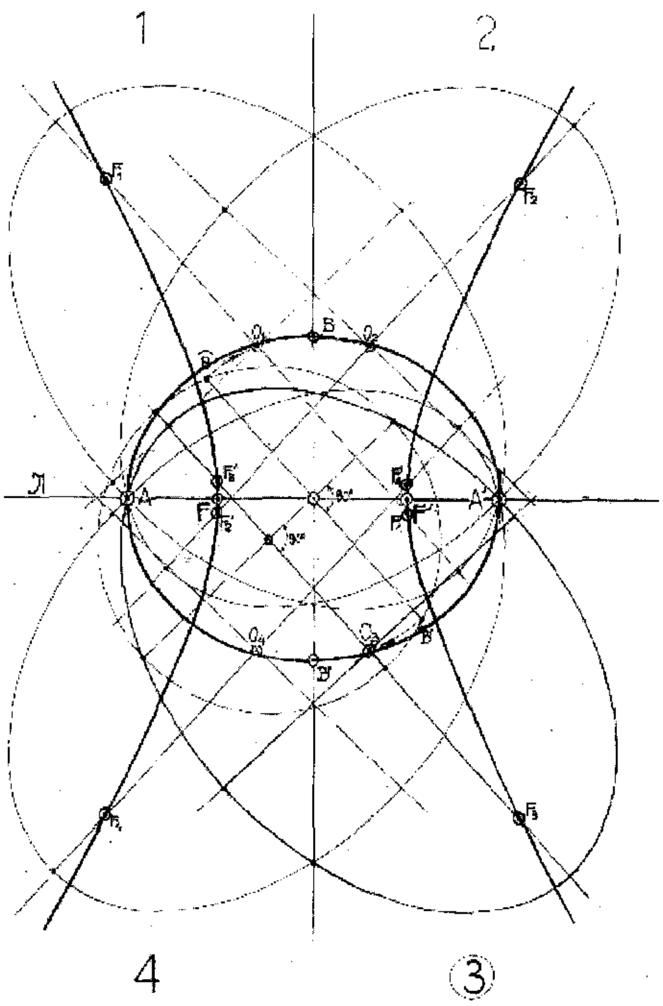
Se puede concluir que todo N-foco generado por N focos coplanares tendrá N focos espaciales en cada plano paralelo a su plano y también que todo N-focoide, para disposiciones particulares de sus focos, puede tener como secciones m-focos siempre que N sea divisible por m.

Así el trifocoide siempre tiene como secciones trifocos, y monofocos solo en el caso en que sus tres focos se encuentren alineados, si las secciones se producen con planos paralelos a su plano generatriz producirán trifocos planos con focos en su plano y si se producen con planos no paralelos a su plano generatriz producirán trifocos espaciales generados por focos fuera de su plano (los del trifocoide) y no tendrán focos en su plano.

Un hexafocoide puede producir como secciones monofocos (focos alineados), bifocos (tres focos sobre cada rama de la hipérbola conjugada) y trifocos (tres focos en dos planos paralelos y sobre las pseudohipérbolas correspondientes).

Figura 4

ELIPSE COMÚN A CUATRO ELIPSOIDES DE ROTACIÓN



Referencias

Aníbal Raúl Archentti: ECPAS – Espacios de Control Puntual de Acción Simultánea. 40 páginas – 10 Figuras

Alberto Horacio Stagnaro: Curvas Continuas y Cerradas Efectuadas Bajo Control de Focos Múltiples de Acción Simultánea. 93 Figuras.